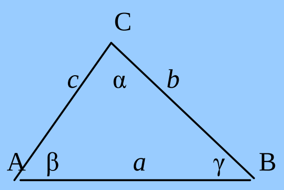
9. 3. PODOBIEŃSTWO TRÓJKĄTÓW

Podobieństwo trójkątów

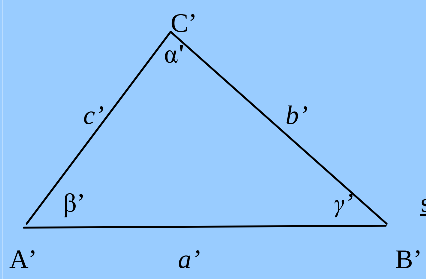


Cechy podobieństwa trójkątów

Cecha BBB: $\triangleleft ABC \sim \triangleleft A'B'C' \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Cecha BKB : $\triangleleft ABC \sim \triangleleft A'B'C' \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \wedge \gamma = \gamma'$

Cecha KKK: $\triangleleft ABC \sim \triangleleft A'B'C' \Leftrightarrow \alpha = \alpha' \wedge \beta = \beta'$



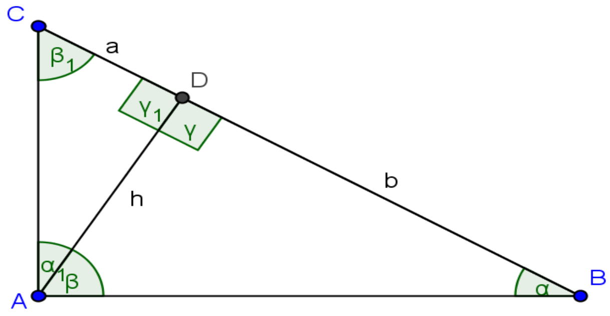
Podobne trójkąty - trójkąty, które mają równe kąty i proporcjonalne boki

skala podobieństwa trójkąta ABC do trójkąta A’B’C’: $k = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

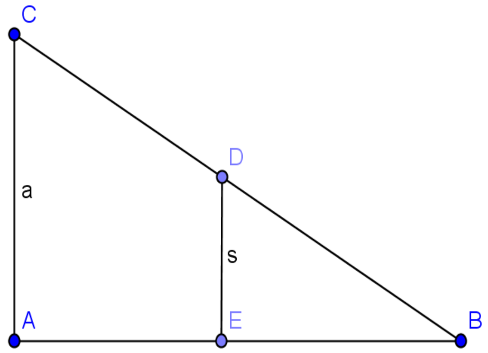
Przykład 9.3.1. Dany jest trójkąt ABC o bokach 6,8,12. Trójkąt A'B'C' ma najdłuższy bok równy 16 i jest podobny do trójkąta ABC. Jaka jest skala podobieństwa trójkąta ABC do trójkąta A'B'C' ?

Rozwiązanie	Komentarz
$k = \frac{a}{a'} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$	Do obliczenia skali podobieństwa trójkąta ABC do trójkąta A’B’C’ wykorzystujemy wzór: $k = \frac{a}{a'}$, gdzie $a' = 16$ jest najdłuższym bokiem trójkąta A’B’C’. Zatem a jest najdłuższym bokiem trójkąta ABC, czyli $a = 12$.

Przykład 9.3.2. W trójkącie prostokątnym z wierzchołka kąta prostego poprowadzono wysokość długości 2. Oblicz długości odcinków na jakie dzieli ta wysokość przeciwprostokątną długości 5.

Rozwiązanie	Komentarz
 **Dane:** $h=2$, $a+b=5$ **Szukane:** a,b	Analiza zadania. Zauważmy, że $\alpha=\alpha_1;\beta=\beta_1;\gamma=\gamma_1=90^\circ$. Zatem z cechy podobieństwa trójkątów KKK, trójkąt *ABD* jest podobny do trójkąta ACD.
$\frac{a}{h}=\frac{h}{b}$ $h^2=a\cdot b$ $2^2=a\cdot b$ $a\cdot b=4$	Odpowiednie boki są proporcjonalne. Bok *a* w trójkącie ACD leży przy kątach β_1,γ_1, zatem odpowiada bokowi *h* w trójkącie ABD leżącemu przy kątach β,γ. Bok *h* w trójkącie ACD leży przy kątach α_1,γ_1, zatem odpowiada bokowi *b* w trójkącie ABD leżącemu przy kątach α,γ.
$\begin{cases}a+b=5\\a\cdot b=4\end{cases}$ $\begin{cases}a=5-b\\(5-b)\cdot b=4\end{cases}$ $5b-b^2=4$ $-b^2+5b-4=0$ $\Delta=5^2-4\cdot(-1)\cdot(-4)=25-16=9$ $b_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5-\sqrt{9}}{2\cdot(-1)}=\frac{-5-3}{-2}=4$ $b_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5+\sqrt{9}}{2\cdot(-1)}=\frac{-5+3}{-2}=1$	Rozwiązujemy układ równań z niewiadomymi *a* i *b* metodą podstawiania . W wyniku podstawienia powstało równanie kwadratowe z niewiadomą *b* . Rozwiązując to równanie stosujemy wzory: $\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c$ $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$a=5-b$ $a_1=5-4=1$ $a_2=5-1=4$	Obliczamy długość odcinka *a*.
Odp. Wysokość podzieliła przeciwprostokątną na odcinki długości 1 i 4.	

Przykład 9.3.3. Pewnego słonecznego dnia cień pana Adama był półtora razy dłuższy od cienia jego syna. Oblicz wzrost pana Adama wiedząc , że jest on o 60 cm wyższy od syna.

Rozwiązanie	Komentarz
 $\|AB\| = c$ - długość cienia pana Adama $\|EB\| = b$ - długość cienia syna **Dane :** **Szukane:** $c = 1\frac{1}{2}b$ a $a = s + 60cm$	Analiza zadania. a – wzrost pana Adama s – wzrost syna
$\frac{a}{s} = \frac{c}{b}$ $\frac{s+60}{s} = \frac{1\frac{1}{2}b}{b}$ $\frac{s+60}{s} = \frac{3}{2}$ $3s = 2(s+60)$ $3s = 2s + 120$ $3s - 2s = 120$ $s = 120$	Z cechy podobieństwa trójkątów KKK, trójkąt *ABC* jest podobny do trójkąta BDE. Zatem odpowiednie boki są proporcjonalne. Podstawiając dane z zadania i po skróceniu *b*, otrzymujemy równanie z niewiadomą *s*. Po rozwiązaniu równania , wiemy, że syn ma 120cm wzrostu.
$a = s + 60 = 120 + 60 = 180$ Odp. Pan Adam ma 180 cm wzrostu.	Obliczamy wzrost pana Adama.

ĆWICZENIA

Ćwiczenie 9.3.1. (2pkt) Dany jest trójkąt o bokach 6, 10 i 14. Oblicz obwód trójkąta podobnego do danego, którego najkrótszy bok ma długość 9.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie skali podobieństwa mniejszego trójkąta do większego.	1
2	Podanie obwodu trójkąta.	1

Ćwiczenie 9.3.2. (2pkt) Oblicz, w jakim stosunku wysokość trójkąta prostokątnego opuszczona na przeciwprostokątną dzieli tę przeciwprostokątną wiedząc, że jedna z przyprostokątnych tego trójkąta jest trzy razy dłuższa od drugiej.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie odcinków jako funkcji zmiennej *h* , na które wysokość *h* dzieli przeciwprostokątną.	1
2	Podanie stosunku odcinków , , na które wysokość *h* dzieli przeciwprostokątną.	1

Ćwiczenie 9.3.3. (1pkt) Koszykarz o wzroście 2,10 m stoi w odległości 10 m od drzewa. Drzewo rzuca cień długości 14,4 m. Oblicz wysokość drzewa wiedząc, że koniec cienia koszykarza pokrywa się z końcem cienia drzewa.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie wysokości drzewa w przybliżeniu do pełnego metra.	1